Applications linéaires de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Une **application linéaire (de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$)** est une fonction

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto T(\vec{x})$$

telle que

$$T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \;=\; \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

En particulier, une application linéaire satisfait toujours $T(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Applications linéaires et matricielles

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Alors

$$T \text{ linéaire} \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in M_{m\times n} \text{ telle que } T(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

On appelle A la **matrice canonique de** T. Elle se construit ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} T(\vec{e}_1) & \ldots & T(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

où $\vec{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, avec le 1 en i−ème position, sont les **vecteurs canoniques de** $\mathbb{R}^n$.

Applications linéaires surjectives

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est **surjective** si

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m,\ \exists \text{ au moins un } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Equivalences à la surjectivité

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire et $A \in M_{m\times n}$ sa matrice canonique. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. T est surjective ;
2. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible ;
3. A admet **un pivot par ligne** ;
4. Span(colonnes de A) $= \mathbb{R}^m$ (les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$)

Applications linéaires injectives

Définition

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est **injective** si

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m,\ \exists \text{ **au maximum un** } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Equivalences à l'injectivité

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire et $A \in M_{m \times n}$ sa matrice canonique. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. T est injective ;
2. le système $A\vec{x} = 0_{\mathbb{R}^m}$ admet la solution unique $\vec{x} = 0_{\mathbb{R}^n}$;
3. A admet **un pivot par colonne** ;
4. les colonnes de A sont linéairement indépendantes ;

Applications linéaires bijectives

Définition

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est **bijective** si elle est à la fois surjective et injective. C'est à dire

$$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \ \exists \textbf{ exactement un } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Equivalences à la bijectivité

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire et $A \in M_{n \times n}$ sa matrice canonique. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. T est bijective ;
2. A est inversible ;
3. A admet n **pivots** ;
4. pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution ($\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$)
5. les colonnes de A sont linéairement indépendantes et engendrent $\mathbb{R}^n$;